كيفية الحصول على المعادلة التفاضلية الجزئية

أولاً الحصول على معادلة تفاضلية جزئية باختزال الثوابت

مثال ① جد معادلة تفاضلية جزئية أقل رتبة ممكنة باختزال الثوابت من العلاقة الآتية: $Z = ax^3 + by^3$

الحل نشتق العلاقة بالنسبة لـ x و بالنسبة لـ y :

$$Z_x = 3ax^2 \Rightarrow a = \frac{Z_x}{3x^2} \cdots ① \quad Z_y = 3by^2 \Rightarrow b = \frac{Z_y}{3y^2} \cdots ②$$

نعوض المعادلتين ① و ② في المعادلة الأصلية نحصل على

$$Z = \left(\frac{Z_x}{3x^2}\right)x^3 + \left(\frac{Z_y}{3y^2}\right)y^3 \Rightarrow Z = \frac{x}{3}Z_x + \frac{y}{3}Z_y \Rightarrow$$ نضرب بـ 3

$$Z = xZ_x + yZ_y$$

مثال ② اختزل الثوابت من العلاقة الآتية للحصول على معادلة تفاضلية جزئية بأقل رتبة ممكنة: $Z = (x-a)^2 + (y-b)^2$

الحل نشتق لـ x ونشتق لـ y كما يلي:

$$Z_x = 2(x-a) \Rightarrow \frac{Z_x}{2} = x - a \Rightarrow a = x - \frac{Z_x}{2} \cdots ①$$

$$Z_y = 2(y-b) \Rightarrow \frac{Z_y}{2} = y - b \Rightarrow b = y - \frac{Z_y}{2} \cdots ②$$

بتعويض المعادلتين ① و ② بالمعادلة الأصلية نحصل على:

$$Z = \left(x - \left(x - \frac{Z_x}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(y - \frac{Z_y}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow$$

«مثال 4»

هنا المثال تم {مسألة وزارية 2016 مع مخطط جديد}

$$\Rightarrow Z=\left(\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{Z_x}{2}\right)^2+\left(\cancel{y}-\cancel{y}+\frac{Z_y}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$Z=\left(\frac{Z_x}{2}\right)^2+\left(\frac{Z_y}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$Z=\frac{(Z_x)^2}{4}+\frac{(Z_y)^2}{4} \Rightarrow Z=\frac{1}{4}(Z_x)^2+\frac{1}{4}(Z_y)^2$$ نفرض ⑤

$$\therefore 4Z=(Z_x)^2+(Z_y)^2 .$$

مثال 5: إحذف الثوابت من العلاقات الآتية للحصول على معادلة تفاضلية جزئية بأقل مرتبة ممكنة :- والمتغير على (x,y) بالتبعية

$$x^2+y^2+(Z-c)^2=a^2$$ الآن نشتق لـ x و y كالآتي.

$$2x+2(Z-c)\cdot Z_x=0 \xrightarrow{(\div 2)} x+(Z-c)Z_x=0 \quad \cdots ①$$

$$2y+2(Z-c)\cdot Z_y=0 \xrightarrow{(\div 2)} y+(Z-c)Z_y=0 \quad \cdots$$

الآن نضرب ق ① بـ Z_y وعلاقة ق ② بـ Z_x نحصل على ما يلي:

$$xZ_y+(Z-c)Z_xZ_y=0 \ldots$$

④ نحصل على :-

أيضاً

$$xZ_y+(Z-c)Z_xZ_y=0$$

بالطرح

$$\mp yZ_x\mp(Z-c)Z_yZ_x=0$$

① $Z=axe^y+\frac{1}{2}a^2e^{2y}+b .$

② $Z=xy+y(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}+b .$ تكملة

③ $Z=a\sin x+b\cos y$ (واجب).

ملاحظة: اذا احتوت المعادلة على حدود فيها مشتقات فيلزم تبديل المتغيرات لغرض تحويل المعادلة الى معادلة ذات حد واحد يحتوي على مشتقات وتحل بالطريقة السابقة. كما في المثال الآتي:

مثال: حل المعادلة التفاضلية: $Z_{xx} = a^2 Z_{yy}$

$$\text{Let } (r = y + ax) \ \& \ (s = y - ax) \longrightarrow$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = -a, \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

$$Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} \overset{\text{نعوض}}{\Rightarrow} Z_x = a\frac{\partial Z}{\partial r} - a\frac{\partial Z}{\partial s}$$

$$Z_{xx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = a\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{\text{نعوض}} + \frac{\partial^2 Z}{\partial r\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}\right) - a\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$

$$Z_{xx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r\partial s} + a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial r}$$

$$Z_{xx} = a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} - 2a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial r} + a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

بنفس الطريقة نحصل على:

$$Z_{yy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

نعوض المعادلتين (1) و (2) في المعادلة الأصلية ونحذف الحدود المتشابهة

$$\cancel{a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}} - 2a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial r} + \cancel{a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}} = \cancel{a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}} + 2a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s\partial r} + \cancel{a^2\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}}$$

نصف المعادلة ←

$$\Rightarrow -2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial r} - 2a^2\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial r} = 0 \Rightarrow$$

$$-4\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial r} = 0 \xrightarrow{\div(-4)} \frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial r} = 0$$

نكامل بالنسبة لـ (s) :.

$$\int \frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial r} = \int 0\, ds \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = \underbrace{\theta(r)}_{\text{دالة اختيارية للمتغير } r}$$

نكامل مرة أخرى

$$\int \frac{\partial z}{\partial r} = \int \theta(r)\, d\theta \Rightarrow$$

$$z = \phi(r) + \overset{\text{دالة اختيارية}}{\psi}(s).$$

الآن نرجع للمتغيرات الأصلية للمعادلة بالتعويض عن قيم r و s بدلالة x و y :.

$$\therefore z = \phi(y+ax) + \psi(y-ax).$$

ثانياً: الحصول على معادلة تفاضلية جزئية باختزال الدوال

مثال: اختزل الدالة من العلاقة المعطاة للحصول على معادلة تفاضلية جزئية أقل رتبة ممكنة:

$Z = F(x^2 - y^2)$.

let $(x^2 - y^2) = u$ والمتغير على y, x $\Longrightarrow Z = F(u)$.

$$Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F'(u) \cdot 2x \quad \dots\dots (1)$$

$\{F'(u)$ or F_u Vz.

$$Z_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -F'(u) \cdot 2y \quad \dots\dots (2)$$

نضرب العلاقة رقم (1) بـ y والعلاقة (2) بـ x نحصل على:

$y Z_x = 2xy F'(u) \dots (3)$ و $x Z_y = -2xy F'(u) \dots (4)$

نجمع المعادلتين (3) و (4) نحصل على:

$y Z_x = \cancel{2xy F'(u)} \dots (3)$

$x Z_y = \cancel{-2xy F'(u)} \dots (4) \Longrightarrow y Z_x + x Z_y = 0$.

مثال (2): اختزل الدوال من العلاقة الآتية للحصول على معادلة تفاضلية جزئية أقل رتبة ممكنة:

$Z = F(x + 3y) + G(x - 3y)$.

let $(x+3y)=u$ & $(x-3y)=V \Rightarrow$

$$Z=f(u)+G(V)$$

$$Z_x=\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial G}{\partial V}\cdot 1$$

توضيح

$$\Rightarrow Z_x=F_u+G_V$$

واضح $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3,\ \frac{\partial V}{\partial x}=1,\ \frac{\partial V}{\partial y}=-3\right\}$

$$Z_y=\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot(3)+\frac{\partial G}{\partial V}(-3)$$

$$\Rightarrow Z_y=3f_u-3G_V$$

الان نشتق Z_x مرة ثانية Z_y

$$Z_{xx}=\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}=\frac{\partial F_u}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G_V}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\Rightarrow$$

$$Z_{xx}=f_{uu}+G_{VV}$$

$$Z_{yy}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=\frac{\partial F_u}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G_V}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\Rightarrow$$

$$Z_{yy}=3\cdot f_{uu}\cdot(3)+(-3)G_{VV}\cdot(-3)\Rightarrow$$

$$Z_{yy}=9f_{uu}+9G_{VV}\Rightarrow$$

$$Z_{yy}=9(f_{uu}+G_{VV})\overset{\text{عوض}}{=}9Z_{xx}$$

طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى

أن أغلب طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية تتضمن خطوات معينة لطريقة تحويل المعادلة إلى معادلة تفاضلية اعتيادية وبالتالي يتم حلها اعتيادياً.

أولاً: طريقة المميزات: تستخدم هذه الطريقة لحل مسائل القيم الابتدائية ذات الصيغة:

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0 \;;$$

$$-\infty < x < \infty \;,\; 0 < t < \infty \quad \& \quad u(x,0) = \phi(x) \;;\; -\infty < x < \infty .$$

تتضمن طريقة الحل بتبديل متغيرات المعادلة (x,t) إلى المتغيرات (s,τ) وهذه الاحداثيين المميزة» حيث يتم تكوين ثلاث معادلات تفاضلية من المعادلة المعطاة الأولى نستخرجها من التفاضل التام للدالة u:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{dt}{ds} .$$

بمقارنة حدود هذه العلاقة مع حدود المعادلة الأصلية وباستخدام الشرط الابتدائي نحصل على المعادلات التفاضلية الاعتيادية الثلاثة الآتية:

① $\dfrac{dx}{ds} = a(x,t) \;;\; x(0) = \tau \;.....①$

ثم نجد منها قيمة x بدلالة τ و s معادلة ④

$$(2)\quad \frac{dt}{ds} = b(x,t)\ ;\ t(0)=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

نحذفها
نعوض t بدلالة s
حسب معادلة (5)

$$(3)\quad \frac{du}{ds} + c(x,t)u = 0\ ;\ u(0) = f(\tau) \quad \ldots\ldots (3)$$

نجد منها المعادلة المطلوبة حسب معادلة (6)
والمشتقة بتعويض (11) وننتهي.

بحل هذه المعادلات نحصل على الحل العام والحل الخاص للمعادلة الأصلية.

ملاحظات

١- كل x في شرط المعادلة الابتدائي يبدل بـ τ

٢- كل t في المعادلة الأصلية يبدل بـ s

٢- الشروط الابتدائية نحصل عليها من الشرط الابتدائي للمعادلة الأصلية.

٣- بحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على العلاقة بين المتغيرات (x, t) والمتغيرات (s, τ).

والى اللقاء

مثال ①: حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$u_x + u_t + 2u = 0 \;;\; -\infty < x < \infty \;;\; 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = \sin(x) \;;\; -\infty < x < \infty$$

الحل: من المعادلة وشروطها نحصل على المعادلات الاعتيادية الآتية:

$$\frac{dx}{ds} = 1 \;;\; x(0) = \tau \cdots ① \;,\; \frac{dt}{ds} = 1 \;;\; t(0) = 0 \cdots ②$$

$$\frac{du}{ds} + 2u = 0 \;;\; u(0) = \sin(\tau) \cdots ③$$ {بدلنا τ بـ x لا توجد علاقة بـ s}

$$\text{from ①}\; dx = ds \xrightarrow{\int} x = s + c_1 \Rightarrow \overset{\text{عوضنا عنه}}{x(0)} = 0 + c_1$$

$$\Rightarrow \tau = 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = \tau \Rightarrow x = s + \tau \cdots ④$$

هنا نرجع x بدلالة s

$$\text{from ②}\; dt = ds \xrightarrow{\int} t = s + c_2 \Rightarrow \overset{\text{نعوض}}{t(0)} = 0 + c_2$$

هنا نرجع t بدلالة s

$$\Rightarrow 0 = 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow t = s \cdots ⑤$$

$$\text{from ③}\; \frac{du}{ds} = -2u \Rightarrow du = -2u\,ds \Rightarrow \frac{du}{u} = -2\,ds \xrightarrow[\text{تفصيل متغيرات}]{\text{تكامل}}$$

$$\ln u = -2s + c \xrightarrow{\text{نأخذ } e \text{ للطرفين}} e^{\ln u} = e^{-2s + \ln c_3} \Rightarrow$$ {لأن: $c = \ln c_3$}

$$u = c_3 e^{-2s} \Rightarrow u(0) = c_3 e^{-2(0)} \Rightarrow u(0) = c_3 \Rightarrow c_3 = \sin\tau$$

$u(s,\tau)$

نعوض بـ

$$U(s,T) = \sin T \, e^{-2s} \quad \ldots\ (6)$$

باستعمال العلاقات (4) و (5) نستبدل المتغيرات (s,T) بالمتغيرات (x,t) حيث أن:

$$\text{from } (4)\quad x = s + T \Rightarrow T = x - s \Rightarrow T = x - t$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة هو:

$$\Rightarrow u(x,t) = \sin(x-t)\, e^{-2t} \quad \ldots\ (7)$$

مثال (٤): حل مسألة القيمة الابتدائية الآتية:

$$x^2 u_x - t^2 u_t - t^2 u = 0 \;;\; -\infty < x < \infty \;;\; 0 < t < \infty$$

$$u(x,1) = \sec(x) \;;\; -\infty < x < \infty$$

الحل: من المعادلة وشروطها نحصل على المعادلات الاعتيادية الآتية:

$$\frac{dx}{ds} = x^2 \;;\; x(0) = T \quad \ldots\ (1) \qquad \frac{dt}{ds} = -t^2 \;;\; t(0) = 1 \quad \ldots\ (2)$$

$$\frac{du}{ds} - s^2 u = 0 \;;\; u(0) = \sec(T) \quad \ldots\ (3)$$

$$\text{from } (1)\quad dx = x^2 ds \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = ds \longrightarrow x^{-2} dx = ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^{-1}}{-1} = s + c_1 \Rightarrow \frac{-1}{x} = s + c_1 \xrightarrow{\text{بضرب الطرفين } x}$$

$$-1=(s+c_1)x \Rightarrow x=\frac{-1}{s+c_1} \Rightarrow x(0)=\frac{-1}{c_1}$$ عوضنا عند $x(0)$

$$\to \tau=\frac{-1}{c_1} \Rightarrow c_1\tau=-1 \to c_1=\frac{-1}{\tau}$$ عوضنا هنا

$$\Rightarrow x=\frac{-1}{s-\frac{1}{\tau}} \to x=\frac{-1}{\frac{s\tau-1}{\tau}} \Rightarrow x=-1\times\frac{\tau}{s\tau-1}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\tau}{1-s\tau} \quad \ldots\ldots (4)$$ قيمة x عرفناها بدلالة s, τ

from (2) $\Rightarrow \frac{dt}{ds}=-t^2 \Rightarrow dt=-ds\,t^2 \to -\frac{dt}{t^2}=ds$

$$\to -t^{-2}dt=ds \xrightarrow{\text{تكامل}} -\frac{t^{-1}}{-1}=s+c_2 \Rightarrow \frac{1}{t}=s+c_2$$

$$\Rightarrow 1=(s+c_2)t \Rightarrow t=\frac{1}{s+c_2} \to t(0)=\frac{1}{c_2} \xrightarrow[t(0)]{\text{عوضنا عند}}$$

$$1=\frac{1}{c_2} \Rightarrow c_2=1 \to t=\frac{1}{s+1} \quad \ldots\ldots (5)$$ (هنا نجد t)

from (3) $\Rightarrow \frac{du}{ds}=s^2u \to du=s^2u\,ds \Rightarrow \frac{du}{u}=s^2ds$

$$\xrightarrow{\text{بالتكامل}} \ln u=\frac{s^3}{3}+c \Rightarrow \ln u=\frac{s^3}{3}+\ln c_3$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{let:}\\ c=\ln c_3\end{array}\right.$

خذ e للطرفين

$$e^{\ln u} = e^{\frac{s^3}{3} + \ln c_3} \Rightarrow e^{\ln u} = e^{\frac{s^3}{3}} \cdot e^{\ln c_3}$$

نعوض بالمعادلة

$$U = c_3\, e^{\frac{s^3}{3}} \Rightarrow U(0) = c_3\, e^{\frac{0^3}{3}} \Rightarrow U(0) = c_3$$

نعوض عنها

$$\rightarrow \sec \tau = c_3$$

لذا نعوض :

$$U(S,\tau) = \sec \tau\, e^{\frac{s^3}{3}} \quad \ldots\ldots (6)$$

لكتابة الحل بدلالة المتغيرات التي تعتمد عليها الدالة المجهولة نستخدم العلاقات :

$$\text{from } (5)\quad t(s+1) = 1 \rightarrow ts + t = 1 \rightarrow ts = 1 - t \rightarrow s = \frac{1-t}{t} \quad (7)$$

$$\text{from } (4) \rightarrow x(1 - s\tau) = \tau \rightarrow x - xs\tau = \tau \rightarrow$$

$$x = \tau + xs\tau \rightarrow x = \tau(1 + xs) \rightarrow \tau = \frac{x}{1 + xs} \Rightarrow$$

وعوضنا عن قيمة S

$$\tau = \frac{x}{1 + x\left(\frac{1-t}{t}\right)} \overset{\text{نوحد}}{=} \frac{x}{\frac{t + x(1-t)}{t}} \overset{\text{نقلب}}{=} \frac{xt}{t + x(1-t)} \quad \ldots\ldots (8)$$

$$\rightarrow U(x,t) = \sec\left(\frac{xt}{t + x(1-t)}\right) e^{\frac{(1-t)^3}{3t^3}}.$$

تمارين واجب

1) $x^2 u_x + t u_t + \frac{u}{t} = 0 \; ; \; -\infty < x < \infty \; ; \; 0 < t < \infty .$

$u(x,1) = e^x \; ; \; -\infty < x < \infty$

2) $xu_x + tu_t + 2tu = 0 \; ; \; -\infty < x < \infty \; ; \; 0 < t < \infty .$

$u(x,0) = x \; ; \; -\infty < x < \infty .$

3) $x^2 u_x + t u_t + u t^2 = 0 , \quad -\infty < x < \infty , \quad 0 < \overset{t}{\cancel{x}} < \infty$

$u(x,1) = e^x \; ; \quad -\infty < x < \infty$